Dualidad, libre de elección, para las álgebras de Tarski

Luciano J. González
Sergio A. Celani (UNICEN)

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa

Núcleo de Matemática Pura y Aplicada
NUMPA

XVII Congreso Dr. Antonio Monteiro - 2023

Abad, M. and Díaz Varela, J. P. and Torrens, A.: *Topological representation for implication algebras*. Algebra universalis 52(1): 39–48 (2004).

Celani, S. and Cabrer, L.: *Topological duality for Tarski algebras*. Algebra universalis 58(2): 73–94 (2008).

Bezhanishvili, N. and Holliday, E. H.: *Choice-free Stone duality.* J. Symb. Log. 20: 109–148 (2020).

McDonald, J. and Yamamoto, K.: *Choice-free duality for orthocomplemented lattices by means of spectral spaces.* Algebra universalis 83,37: (2022).

Massas, G.: *Choice-Free de Vries Duality.* ArXiv: https://arxiv.org/abs/2203.09667 (2022).

Moshier, A. and Jipsen, P.: *Topological duality and lattice expansions, I: A topological construction of canonical extensions.* Algebra universalis 71(2): 109–126 (2014).

Bezhanishvili, N. and Holliday, E. H.: *Choice-free Stone duality*. J. Symb. Log. 20: 109–148 (2020).

McDonald, J. and Yamamoto, K.: *Choice-free duality for orthocomplemented lattices by means of spectral spaces*. Algebra universalis 83,37: (2022).

Massas, G.: *Choice-Free de Vries Duality*. ArXiv: https://arxiv.org/abs/2203.09667 (2022).

Moshier, A. and Jipsen, P.: *Topological duality and lattice expansions, I: A topological construction of canonical extensions*. Algebra universalis 71(2): 109–126 (2014).

Álgebras de Tarski

Definición

Un álgebra $\langle A, \to, 1\rangle$ de tipo (2,0) es llamada de Tarski si:

(T1) $1 \to a = a$,

(T2) $a \to a = 1$,

(T3) $a \to (b \to c) = (a \to b) \to (a \to c)$,

(T4) $(a \to b) \to b = (b \to a) \to a$.

Definición

Un subconjunto F de un álgebra de Tarski A es llamado filtro (implicativo) si

$$a, a \to b \in F \implies b \in F.$$

$$\mathrm{Fi}(A) = \text{colección de todos los filtros de } A$$

$$\mathrm{X}(A) = \text{colección de todos los filtros propios de } A.$$

Álgebras de Tarski

Definición

Un álgebra $\langle A, \to, 1\rangle$ de tipo (2,0) es llamada de Tarski si:

(T1) $1 \to a = a$,

(T2) $a \to a = 1$,

(T3) $a \to (b \to c) = (a \to b) \to (a \to c)$,

(T4) $(a \to b) \to b = (b \to a) \to a$.

Definición

Un subconjunto F de un álgebra de Tarski A es llamado filtro (implicativo) si

$$a, a \to b \in F \implies b \in F.$$

$\mathrm{Fi}(A)$ = colección de todos los filtros de A

$\mathrm{X}(A)$ = colección de todos los filtros propios de A.

Álgebras de Tarski

Definición

Sea $a \in A$. El aniquilador de a es:

$$a^{\top} = \{x \in A : x \vee a = 1\}.$$

Proposición

Sea A un álgebra de Tarski. Sean $a \in A$ y F un filtro.

1. $a^{\top} \in \mathrm{Fi}(A)$.
2. $(a \vee b)^{\top} = a^{\top} \veebar b^{\top}$.
3. $a^{\top} \veebar [a) = A$ and $a^{\top} \cap [a) = \{1\}$.
4. If $a \notin F$, then $a \notin F \veebar a^{\top}$.
5. If $a^{\top} \subseteq F$, then $a \notin F$.
6. If $a^{\top} \nsubseteq F$, then the implicative filter $F \veebar [a)$ is proper.

Álgebras de Tarski

Definición

Sea $a \in A$. El aniquilador de a es:

$$a^{\top} = \{x \in A : x \vee a = 1\}.$$

Proposición

Sea A un álgebra de Tarski. Sean $a \in A$ y F un filtro.

1. $a^{\top} \in \mathrm{Fi}(A)$.
2. $(a \vee b)^{\top} = a^{\top} \veebar b^{\top}$.
3. $a^{\top} \veebar [a) = A$ and $a^{\top} \cap [a) = \{1\}$.
4. If $a \notin F$, then $a \notin F \veebar a^{\top}$.
5. If $a^{\top} \subseteq F$, then $a \notin F$.
6. If $a^{\top} \nsubseteq F$, then the implicative filter $F \veebar [a)$ is proper.

Abiertos regulares

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico. Un $U \subseteq X$ es llamado abierto regular si

$$U = \mathsf{int}(\mathsf{cl}(U)).$$

Sabemos que

$$\langle \mathcal{RO}(X), \cap, \vee_{\mathcal{RO}}, \neg_{\mathcal{RO}}, \emptyset, X \rangle$$

es un álgebra de Boole (completa), donde

$$U \vee_{\mathcal{RO}} V = \mathsf{int}(\mathsf{cl}(U \cup V)) \qquad \text{y} \qquad \neg_{\mathcal{RO}} U = \mathsf{cl}(U)^c = \mathsf{int}(U^c).$$

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un T_0-espacio y sea $\preccurlyeq$ su orden especialización:

$$x \preccurlyeq y \iff \forall U \in \tau (x \in U \implies y \in U).$$

Entonces vamos a considerar la topología

$$\tau_{\preccurlyeq} = \text{familia de todos los conjuntos crecientes de } \langle X, \preccurlyeq \rangle.$$

Abiertos regulares

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico. Un $U \subseteq X$ es llamado abierto regular si

$$U = \mathsf{int}(\mathsf{cl}(U)).$$

Sabemos que

$$\langle \mathcal{RO}(X), \cap, \vee_{\mathcal{RO}}, \neg_{\mathcal{RO}}, \emptyset, X \rangle$$

es un álgebra de Boole (completa), donde

$$U \vee_{\mathcal{RO}} V = \mathsf{int}(\mathsf{cl}(U \cup V)) \qquad \text{y} \qquad \neg_{\mathcal{RO}} U = \mathsf{cl}(U)^c = \mathsf{int}(U^c).$$

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un T_0-espacio y sea $\preccurlyeq$ su orden especialización:

$$x \preccurlyeq y \iff \forall U \in \tau (x \in U \implies y \in U).$$

Entonces vamos a considerar la topología

$$\tau_{\preccurlyeq} = \text{familia de todos los conjuntos crecientes de } \langle X, \preccurlyeq \rangle.$$

Abiertos regulares

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico. Un $U \subseteq X$ es llamado abierto regular si

$$U = \mathsf{int}(\mathsf{cl}(U)).$$

Sabemos que

$$\langle \mathcal{RO}(X), \cap, \vee_{\mathcal{RO}}, \neg_{\mathcal{RO}}, \emptyset, X \rangle$$

es un álgebra de Boole (completa), donde

$$U \vee_{\mathcal{RO}} V = \mathsf{int}(\mathsf{cl}(U \cup V)) \qquad \text{y} \qquad \neg_{\mathcal{RO}} U = \mathsf{cl}(U)^c = \mathsf{int}(U^c).$$

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un T_0-espacio y sea $\preccurlyeq$ su orden especialización:

$$x \preccurlyeq y \iff \forall U \in \tau (x \in U \implies y \in U).$$

Entonces vamos a considerar la topología

$$\tau_{\preccurlyeq} = \text{familia de todos los conjuntos crecientes de } \langle X, \preccurlyeq \rangle.$$

Abiertos regulares

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico. Un $U \subseteq X$ es llamado abierto regular si

$$U = \mathsf{int}(\mathsf{cl}(U)).$$

Sabemos que

$$\langle \mathcal{RO}(X), \cap, \vee_{\mathcal{RO}}, \neg_{\mathcal{RO}}, \emptyset, X \rangle$$

es un álgebra de Boole (completa), donde

$$U \vee_{\mathcal{RO}} V = \mathsf{int}(\mathsf{cl}(U \cup V)) \qquad \text{y} \qquad \neg_{\mathcal{RO}} U = \mathsf{cl}(U)^c = \mathsf{int}(U^c).$$

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un T_0-espacio y sea $\preccurlyeq$ su orden especialización:

$$x \preccurlyeq y \iff \forall U \in \tau (x \in U \implies y \in U).$$

Entonces vamos a considerar la topología

$$\tau_{\preccurlyeq} = \text{familia de todos los conjuntos crecientes de } \langle X, \preccurlyeq \rangle.$$

Representación

Sea A un álgebra de Tarski. Sea

$$\mathrm{X}(A) = \mathrm{Fi}(A) - \{A\}$$

Sea $\alpha \colon A \to \mathcal{P}(\mathrm{X}(A))$ definida por

$$\alpha(a) = \{F \in \mathrm{X}(A) : a \in F\}.$$

Sea τ_A la topología sobre $\mathrm{X}(A)$ generada por la familia

$$\mathcal{L}_A = \{\alpha(a) : a \in A\}.$$

El orden espacialización $\preccurlyeq_{\tau_A}$ de $\langle \mathrm{X}(A), \tau_A \rangle$ es:

$$F \preccurlyeq_{\tau_A} G \iff \forall U \in \tau_A (F \in U \implies G \in U) \iff F \subseteq G.$$

$$\langle \mathrm{X}(A), \tau_A \rangle \qquad \text{y} \qquad \langle \mathrm{X}(A), \tau_{\subseteq} \rangle.$$

Representación

Sea A un álgebra de Tarski. Sea

$$\mathrm{X}(A) = \mathrm{Fi}(A) - \{A\}$$

Sea $\alpha\colon A \to \mathcal{P}(\mathrm{X}(A))$ definida por

$$\alpha(a) = \{F \in \mathrm{X}(A) : a \in F\}.$$

Sea τ_A la topología sobre $\mathrm{X}(A)$ generada por la familia

$$\mathcal{L}_A = \{\alpha(a) : a \in A\}.$$

El orden espacialización $\preccurlyeq_{\tau_A}$ de $\langle \mathrm{X}(A), \tau_A \rangle$ es:

$$F \preccurlyeq_{\tau_A} G \iff \forall U \in \tau_A (F \in U \implies G \in U) \iff F \subseteq G.$$

$$\langle \mathrm{X}(A), \tau_A \rangle \qquad \text{y} \qquad \langle \mathrm{X}(A), \tau_{\subseteq} \rangle.$$

Representación

Sea A un álgebra de Tarski. Sea

$$\mathrm{X}(A) = \mathrm{Fi}(A) - \{A\}$$

Sea $\alpha\colon A \to \mathcal{P}(\mathrm{X}(A))$ definida por

$$\alpha(a) = \{F \in \mathrm{X}(A) : a \in F\}.$$

Sea τ_A la topología sobre $\mathrm{X}(A)$ generada por la familia

$$\mathcal{L}_A = \{\alpha(a) : a \in A\}.$$

El orden espacialización $\preccurlyeq_{\tau_A}$ de $\langle \mathrm{X}(A), \tau_A \rangle$ es:

$$F \preccurlyeq_{\tau_A} G \iff \forall U \in \tau_A (F \in U \implies G \in U) \iff F \subseteq G.$$

$$\langle \mathrm{X}(A), \tau_A \rangle \qquad \text{y} \qquad \langle \mathrm{X}(A), \tau_{\subseteq} \rangle.$$

Representación

Proposición

1. $\langle \mathrm{X}(A), \tau_A \rangle$ es T_0.
2. $\mathcal{L}_A = \{\alpha(a) : a \in A\} \subseteq \mathsf{KO}(\mathrm{X}(A), \tau_A) \cap \mathcal{RO}(X(A), \tau_\subseteq)$.
3. $\alpha(a \to b) = \alpha(a) \to_{\mathcal{RO}} \alpha(b)$.
4. $\alpha \colon \langle A, \to, 1 \rangle \to \langle \mathcal{L}_A, \to_{\mathcal{RO}}, \mathrm{X}(A) \rangle$ es un isomorfismo.
5. $\alpha(a \vee b) = \alpha(a) \vee_{\mathcal{RO}} \alpha(b)$.

Representación

Definición

Diremos que $\langle X, \tau, \mathcal{L} \rangle$ es un espacio de Tarski si

1. $\langle X, \tau \rangle$ es un T_0-espacio, $\mathcal{L}$ es una subbase de τ tal que $X \in \mathcal{L}$.
2. $\mathcal{L} \subseteq \mathsf{KO}(X, \tau) \cap \mathcal{RO}(X, \tau_{\preccurlyeq})$.
3. Para todos $U, V \in \mathcal{L}$, $U \rightarrow_{\mathcal{RO}} V \in \mathcal{L}$.
4. Para cada $x \in X$, existe un $U \in \mathcal{L}$ tal que $x \notin U$.
5. Para todos $\nabla \cup \Delta \subseteq \mathcal{L}$, si ∇ satisface que
$$\exists U \in \mathcal{L} \text{ tal que } \forall U_1, \ldots, U_n \in \nabla, U_1 \cap \cdots \cap U_n \nsubseteq U$$
y $\bigcap \nabla \subseteq \bigcup \Delta$, entonces existen $U_1, \ldots, U_n \in \nabla$ y $V \in \Delta$ tal que $U_1 \cap \cdots \cap U_n \subseteq V$.

Representación

Proposición

Si $\langle X, \tau, \mathcal{L} \rangle$ es un espacio de Tarski, entonces

$$\langle \mathcal{L}, \rightarrow_{\mathcal{RO}}, X \rangle$$

es un álgebra de Tarski.

Sea $\langle X, \tau, \mathcal{L} \rangle$ un espacio de Tarski. Sea $\epsilon \colon X \to \mathrm{X}(\mathcal{L})$ definida por

$$\epsilon(x) = \{U \in \mathcal{L} : x \in U\}$$

Proposición

Sea $\langle X, \tau, \mathcal{L} \rangle$ un espacio que cumple las condiciones 1–4. Entonces, la condición 5. de la definición de espacio de Tarski es equivalente a que la función $\epsilon \colon X \to \mathrm{X}(\mathcal{L})$ sea sobreyectiva.

Representación

Proposición

Si $\langle X, \tau, \mathcal{L} \rangle$ es un espacio de Tarski, entonces

$$\langle \mathcal{L}, \rightarrow_{\mathcal{RO}}, X \rangle$$

es un álgebra de Tarski.

Sea $\langle X, \tau, \mathcal{L} \rangle$ un espacio de Tarski. Sea $\epsilon \colon X \to \mathrm{X}(\mathcal{L})$ definida por

$$\epsilon(x) = \{U \in \mathcal{L} : x \in U\}$$

Proposición

Sea $\langle X, \tau, \mathcal{L} \rangle$ un espacio que cumple las condiciones 1–4. Entonces, la condición 5. de la definición de espacio de Tarski es equivalente a que la función $\epsilon \colon X \to \mathrm{X}(\mathcal{L})$ sea sobreyectiva.

Representación

Proposición

Sea A un álgebra de Tarski. Entonces $\langle \mathrm{X}(A), \tau_A, \mathcal{L}_A \rangle$ es un espacio de Tarski.

Teorema

Cada álgebra de Tarski A es isomorfa al álgebra de Tarski dual $\langle \mathcal{L}_A, \rightarrow_{\mathcal{RO}}, \mathrm{X}(A) \rangle$ del espacio de Tarski $\langle \mathrm{X}(A), \tau_A, \mathcal{L}_A \rangle$.

Teorema

Sea $\langle X, \tau, \mathcal{L} \rangle$ un espacio de Tarski. Entonces

$$\epsilon\colon \langle X, \tau, \mathcal{L} \rangle \to \langle \mathrm{X}(\mathcal{L}), \tau_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}_{\mathcal{L}} \rangle$$

es un homeomorfismo tal que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{L}} = \{\epsilon[U] : U \in \mathcal{L}\}$$

Representación

Proposición

Sea A un álgebra de Tarski. Entonces $\langle \mathrm{X}(A), \tau_A, \mathcal{L}_A \rangle$ es un espacio de Tarski.

Teorema

Cada álgebra de Tarski A es isomorfa al álgebra de Tarski dual $\langle \mathcal{L}_A, \to_{\mathcal{RO}}, \mathrm{X}(A) \rangle$ del espacio de Tarski $\langle \mathrm{X}(A), \tau_A, \mathcal{L}_A \rangle$.

Teorema

Sea $\langle X, \tau, \mathcal{L} \rangle$ un espacio de Tarski. Entonces

$$\epsilon \colon \langle X, \tau, \mathcal{L} \rangle \to \langle \mathrm{X}(\mathcal{L}), \tau_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}_{\mathcal{L}} \rangle$$

es un homeomorfismo tal que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{L}} = \{\epsilon[U] : U \in \mathcal{L}\}$$

Resumen

$$\begin{tikzcd} \langle A, \to, 1\rangle \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & \langle \mathrm{X}(A), \tau_A, \mathcal{L}_A\rangle \arrow[r, rightsquigarrow] & \langle \mathcal{L}_A, \to_{\mathcal{RO}}, \mathrm{X}(A)\rangle \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \langle X, \tau, \mathcal{L}\rangle \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[rr, bend right, "\epsilon"'] & \langle \mathcal{L}, \to_{\mathcal{RO}}, X\rangle \arrow[r, rightsquigarrow] & \langle \mathrm{X}(\mathcal{L}), \tau_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}_{\mathcal{L}}\rangle \end{tikzcd}$$

Morfismos

Definición

Una función $h\colon A \to B$ entre álgebras de Tarski es llamada:

- semi-homomorfismo si $h(a \to b) \leq h(a) \to h(b)$.
- homomorfismo si $h(a \to b) = h(a) \to h(b)$.

Categorías:

$$\mathcal{STA} = \text{Álgebras de Tarski} + \text{semi-homomorfismos.}$$

$$\mathcal{HTA} = \text{Álgebras de Tarski} + \text{homomorfismos.}$$

Morfismos

Definición

Sean $\langle X_1, \tau_1, \mathcal{L}_1 \rangle$ y $\langle X_2, \tau_2, \mathcal{L}_2 \rangle$ espacios de Tarski. Sea $R \subseteq X_1 \times X_2$. R es llamada un semi-morfismo de Tarski si:

(R1) Para cada $v \in \mathcal{L}_2$, $h_R(v) = \{x \in X_1 : R(x) \subseteq v\} \in \mathcal{L}_1$.

(R2) Si $x \preccurlyeq_1 x'$, entonces $R(x') \subseteq R(x)$.

(R3) $R(x) = \bigcap \{v \in \mathcal{L}_2 : R(x) \subseteq v\}$.

Diremos que R es un morfismo de Tarski si es un semi-morfismo de Tarski y

(R4) Si $y \in R(x)$, entonces existe $x' \in X_1$ tal que $x \preccurlyeq_1 x'$ y $R(x') = [y)_{\preccurlyeq_2}$.

Categorías:

$$\mathcal{STS} = \text{Espacios de Tarski} + \text{semi-morfismos de Tarski.}$$

$$\mathcal{MTS} = \text{Espacios de Tarski} + \text{morfismos de Tarski.}$$

Equivalencia dual

$$h\colon A \to B \rightsquigarrow R_h \subseteq \mathrm{X}(B) \times \mathrm{X}(A)$$

$$(y, x) \in R_h \iff h^{-1}[y] \subseteq x$$

$$R \subseteq X_1 \times X_2 \rightsquigarrow h_R\colon \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$$

$$h_R(v) = \{x \in X_1 : R(X) \subseteq v\}$$

Teorema
Hay una equivalencia dual entre las categorías $\mathcal{STA}$ y $\mathcal{STS}$.

Teorema
Hay una equivalencia dual entre las categorías $\mathcal{HTA}$ y $\mathcal{MTS}$.

Equivalencia dual

$$h\colon A \to B \rightsquigarrow R_h \subseteq \mathrm{X}(B) \times \mathrm{X}(A)$$

$$(y, x) \in R_h \iff h^{-1}[y] \subseteq x$$

$$R \subseteq X_1 \times X_2 \rightsquigarrow h_R\colon \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$$

$$h_R(v) = \{x \in X_1 : R(X) \subseteq v\}$$

Teorema

Hay una equivalencia dual entre las categorías $\mathcal{STA}$ y $\mathcal{STS}$.

Teorema

Hay una equivalencia dual entre las categorías $\mathcal{HTA}$ y $\mathcal{MTS}$.

Equivalencia dual

$$h\colon A \to B \rightsquigarrow R_h \subseteq \mathrm{X}(B) \times \mathrm{X}(A)$$

$$(y, x) \in R_h \iff h^{-1}[y] \subseteq x$$

$$R \subseteq X_1 \times X_2 \rightsquigarrow h_R\colon \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$$

$$h_R(v) = \{x \in X_1 : R(X) \subseteq v\}$$

Teorema
Hay una equivalencia dual entre las categorías $\mathcal{STA}$ y $\mathcal{STS}$.

Teorema
Hay una equivalencia dual entre las categorías $\mathcal{HTA}$ y $\mathcal{MTS}$.

Álgebras de Boole generalizadas

Definición

Un álgebra de Boole generalizada es un retículo distributivo relativamente complementado con último elemento.

Cada álgebra de Boole generalizada es en particular un álgebra de Tarski donde:

$$a \to b \text{ es el complemento de } a \text{ en el intervalo } [a \wedge b, 1].$$

Sea $\langle G, \wedge, \vee, \to, 1\rangle$ un álgebra de Boole generalizada. Sea $\langle \mathrm{X}(G), \tau_G, \mathcal{L}_G\rangle$ su espacio de Tarski dual.

Proposición

1. $\alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \cap \alpha(b)$.
2. $\mathcal{L}_G$ es una base para τ_G.
3. $\mathcal{L}_G \cup \{\emptyset\} = \mathsf{KO}(\mathrm{X}(G), \tau_G) \cap \mathcal{RO}(\mathrm{X}(G), \tau_{\subseteq})$.

Álgebras de Boole generalizadas

Definición

Un álgebra de Boole generalizada es un retículo distributivo relativamente complementado con último elemento.

Cada álgebra de Boole generalizada es en particular un álgebra de Tarski donde:

$$a \to b \text{ es el complemento de } a \text{ en el intervalo } [a \wedge b, 1].$$

Sea $\langle G, \wedge, \vee, \to, 1\rangle$ un álgebra de Boole generalizada. Sea $\langle \mathrm{X}(G), \tau_G, \mathcal{L}_G\rangle$ su espacio de Tarski dual.

Proposición

1. $\alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \cap \alpha(b)$.
2. $\mathcal{L}_G$ es una base para τ_G.
3. $\mathcal{L}_G \cup \{\emptyset\} = \mathsf{KO}(\mathrm{X}(G), \tau_G) \cap \mathcal{RO}(\mathrm{X}(G), \tau_\subseteq)$.

Dualidad para álgebras de Boole generalizadas

Definición

$\langle X, \tau, \mathcal{L}\rangle$ es llamado un BG-espacio si

(G1) $\langle X, \tau\rangle$ es T_0 y $X \in \mathcal{L}$.

(G2) $\mathcal{L} \cup \{\emptyset\} = \mathsf{KO}(X, \tau) \cap \mathcal{RO}(X, \tau_{\preccurlyeq})$ y $\mathcal{L}$ es una base para τ.

(G3) $\mathcal{L}$ es cerrada bajo $\cap$ y $\rightarrow_{\mathcal{RO}}$.

(G4) Para cada $x \in X$, existe un $U \in \mathcal{L}$ tal que $x \notin U$.

(G5) Para todos $\nabla \cup \Delta \subseteq \mathcal{L}$, si ∇ satisface que

$$\exists U \in \mathcal{L} \text{ tal que } \forall U_1, \ldots, U_n \in \nabla, U_1 \cap \cdots \cap U_n \nsubseteq U$$

y $\bigcap \nabla \subseteq \bigcup \Delta$, entonces existen $U_1, \ldots, U_n \in \nabla$ y $V \in \Delta$ tal que $U_1 \cap \cdots \cap U_n \subseteq V$.

Dualidad para álgebras de Boole generalizadas

$$\langle G, \wedge, \vee, \rightarrow, 1\rangle \rightsquigarrow \langle \mathrm{X}(G), \tau_G, \mathcal{L}_G\rangle$$

$$\langle X, \tau, \mathcal{L}\rangle \rightsquigarrow \langle \mathcal{L}, \cap, \vee_{\mathcal{RO}}, \rightarrow_{\mathcal{RO}}, X\rangle$$

Categorías:

$\mathcal{ABG}$ = Álgebras de Boole generalizadas + homomorfismos

$\mathcal{BGS}$ = BG-espacios + morfismos de Tarski

Teorema

Hay una equivalencia dual entre las categorías $\mathcal{ABG}$ y $\mathcal{BGS}$.

Dualidad para álgebras de Boole generalizadas

$$\langle G, \wedge, \vee, \rightarrow, 1\rangle \rightsquigarrow \langle \mathrm{X}(G), \tau_G, \mathcal{L}_G\rangle$$

$$\langle X, \tau, \mathcal{L}\rangle \rightsquigarrow \langle \mathcal{L}, \cap, \vee_{\mathcal{RO}}, \rightarrow_{\mathcal{RO}}, X\rangle$$

Categorías:

$\mathcal{ABG}$ = Álgebras de Boole generalizadas + homomorfismos
$\mathcal{BGS}$ = BG-espacios + morfismos de Tarski

Teorema
Hay una equivalencia dual entre las categorías $\mathcal{ABG}$ y $\mathcal{BGS}$.

¡¡¡Gracias!!!